

TD₃ – Algèbre Linéaire : Rappels et Compléments

Exercices à préparer

Exercice 1 ★★

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \text{Vect}(\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 3)\}).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$
2. Trouver une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.
3. Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 dans cette base.
4. En déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 2 ★★★

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe deux homothéties, et deux seulement, vérifiant la condition demandée.
2. Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.